封页

姓名：丁宇堃

所属学校学生的省份：安徽省合肥一六八中学

国别：中国

指导老师姓名：孙文海

论文标题：裴蜀定理的加强证明

裴蜀定理的加强证明

摘要：裴蜀定理是初等数论中一个非常重要的定理，即当 n 个整数 $a_1,a_2,...,a_n$ 满足 $(a_1,a_2,...,a_n)=1$ 时，存在无穷多组整数 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 可以使得 $x_1a_1+x_2a_2+...+x_na_n=1$。这里的 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 并没有特别的限制，是否可以给 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 一些限制条件而使裴蜀定理依然成立呢？首先，当 n=3 时，我们的研究表明当整数 a_1,a_2,a_3 满足 $(a_1,a_2,a_3)=1$ 时，存在无穷多组整数 (x_1,x_2,x_3) 使得 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=1$ 和 $x_1|x_2$ 同时成立。进一步，我们研究发现，当 n 个整数 $a_1,a_2,...,a_n$ 满足 $(a_1,a_2,...,a_n)=1$ 时，存在无穷多组整数 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 可以使得 $x_1a_1+x_2a_2+...+x_na_n=1$ 和 $x_1|x_i$ (i=2,3,…,n-1)同时成立。经过进一步的探索，我们的研究结果表明当 n 个整数 $a_1,a_2,...,a_n$ 满足 $(a_1,a_2,...,a_n)=1$ 时，存在无穷多组整数 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 可以使得 $x_1a_1+x_2a_2+...+x_na_n=1$ 和 $x_i|x_{i+1}$ (i=1,3,…,n-2)同时成立。总之，在该论文中，我们通过简洁而巧妙的证明，发现了一系列加强的裴蜀定理，使得裴蜀定理更加丰富而有趣。

Abstract

Bezout theorem is a very important theorem of elementary number theory. That is when an integer array $a_1, a_2, ..., a_n$ has the property that $(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$, there exists infinite integer arrays $(x_1, x_2, ..., x_n)$ which make $x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = 1$. Here, there is no particular limits to $(x_1, x_2, ..., x_n)$, however, can we add some conditions to it and still keep the conclusion? Firstly, for n=3, it shows that when an integer array (a1,a2,a3) has the property that (a1,a2,a3)=1, there exists infinite integer arrays (x1,x2,x3) which make $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 1$ and $x_1 | x_2$. Further, we found when $(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$ ($a_1, a_2, ..., a_n$ are all integers), there exist infinite integer arrays $(x_1, x_2, ..., x_n)$ which make $x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = 1$ and $x_1 | x_i$ (i=2,3,…,n-1) and there also exist infinite integer arrays $(x_1, x_2, ..., x_n)$ which make $x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = 1$ and $x_i | x_{i+1}$ (i=1,3,…,n-2). Indeed, that is all that is done in this article. We found a series of "stronger Bezout theorems" and through concise and clever proofs, we made Bezout theorem more interesting.

裴蜀定理的加强证明

裴蜀定理是初等数论中一个非常重要的基本定理，在各级各类数学竞赛中出现了很多以其为背景的试题，因此，深入理解这个定理是十分必要的。

我们首先来看看该定理的内容，设$a_1, a_2, ..., a_n$为n个整数，d是它们的最大公约数，那么存在无穷多组整数$(x_1, x_2, ..., x_n)$ 使得$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = d$。特别来说，如果$a_1, a_2, ..., a_n$（不是两两互质）互质，那么存在无穷多组整数$(x_1, x_2, ..., x_n)$使得$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = 1$ 。

该定理的证明方法很多，证明也不困难，我们的想法是能不能对上述$x_1, x_2, ..., x_n$做一些限制，使该定理仍然成立。我们先从简单的n=2开始，若$(a_1, a_2) = 1$,则存在无穷多组整数(x_1, x_2)使得$x_1a_1 + x_2a_2 = 1$，我们想这里的（x_1，x_2）能否具有整除的关系，即$x_1 | x_2$，若该条件成立，必然得到$x_1 | 1$，即$x_1=1$ 或者-1，即$x_2a_2=1 \pm a_1$，显然该方程未必有整数解，例如$a_1=3$，$a_2=5$。

那么我们在来看看当 n=3 的情形，若$(a_1, a_2, a_3) = 1$,则存在无穷多组整数(x_1, x_2, x_3)使得$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 1$，我们想这里的$(x_1, x_2, x_3)$能否具有整除的关系？假设$x_1 | x_2$，$x_1 | x_3$，若该条件成立，必然得到$x_1 | 1$，即$x_1 = 1$或者$-1$，即$x_2a_2 + x_3a_3 = 1 \pm a_1$，显然该方程也未必有整数解，例如$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7$。所以该结论也不成立。那么当 n=3 时，是否存在无穷多组整数(x_1, x_2, x_3)，其中两个数具有整除关系，例如$x_2 | x_3$，使得

$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=1$成立。幸运的是，上述定理是成立的。

我们先来证明一个引理 1：$(a_1,a_2,a_3)=1$，存在无穷多个整数 k，使得$(ka_1+a_2,a_3)=1$

证明 1：若$(a_1,a_3)=1$，易证存在无穷多个正整数 k，使得

$ka_1+a_2\equiv 1(\bmod a_3)$，结论成立

若$(a_1,a_3)=d\geq 1$,利用唯一分解定理将a_1表示成如下

$a_1=p_1{}^{\alpha_1}...p_l{}^{\alpha_l}q$ （$\alpha_i\geq 1$,且p_i为质数）

$a_3=p_1{}^{\beta_1}...p_l{}^{\beta_l}r$ （$\beta_i\geq 1$,且p_i为质数）

$(a_1,a_3)=d=p_1{}^{\min(\alpha_1,\beta_1)}....p_l{}^{\min(\alpha_l,\beta_l)}$

且易知$(r,a_1)=1$，$(p_i,a_2)=1$

易证对任何整数 k，都有$(ka_1+a_2,p_i)=1$，则$(ka_1+a_2,p_1^{\alpha_1}...p_l^{\alpha_l})=1$

且存在无穷多个整数 k 使得$ka_1+a_2\equiv 1(\bmod r)$，则$(ka_1+a_2,r)=1$

则$(ka_1+a_2,a_3)=1$成立

证明 2：将a_3唯一分解定理表示$a_3=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}q_1^{\beta_1}...q_l^{\beta_l}r_1^{\gamma_1}...r_m^{\gamma_m}$

（这里$p_1,...p_k,q_1,...q_l,r_1...r_m$均为质数，且$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\geq 1$）

1）假设$p_i|a_1$，且$(p_i,a_2)=1$,则无论 k 为何值，$(ka_1+a_2,p_i)=1$

2）假设$(q_i,a_1)=1$，且$q_i|a_2$只需$k\equiv 1(\bmod q_i)$，可得$(ka_1+a_2,q_i)=1$

3）假设$(r_i,a_1)=1$，$(r_i,a_2)=1$，只需$ka_1+a_2\equiv 1(\bmod r_i)$

即$ka_1\equiv 1-a_2(\bmod r_i)$，由$(r_i,a_1)=1$可知一定存在$b_i$使得$a_1b_i\equiv 1(\bmod r_i)$，

即要求$k\equiv b_i(1-a_2)(\bmod r_i)$，由$q_1,...q_l,r_1,...,r_m$两两互质，根据中国剩余定理，下列同余方程组一定有无穷多组整数解

$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod{q_1} \\ \dots \\ k \equiv 1 \pmod{q_l} \\ k \equiv b_1(1-a_2) \pmod{r_1} \\ \dots \\ k \equiv b_m(1-a_2) \pmod{r_m} \end{cases}$$

则 $(ka_1 + a_2, a_3) = 1$ 成立

利用上述引理我们证明下面的定理 1

定理 1：若 $(a_1, a_2, a_3) = 1$,则存在无穷多组整数 (x_1, x_2, x_3)，满足

1） $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 1$

2） $x_1 | x_2$

证明：由上述引理可知存在无穷多个整数 k 使得 $(ka_2 + a_1, a_3) = 1$，

由裴蜀定理可得存在无穷多组整数 (s,t) 使得 $s(ka_2 + a_1) + ta_3 = 1$

令 $x_1 = s, x_2 = sk, x_3 = t$，易知 $x_1 | x_2$，上述定理 1 成立。

下面我们猜想上述结论对所有 n（n≥3）都成立吗？幸运的是，我们的猜想是成立的。下面我们还是先证一个引理 2

引理 2：若 $(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$,证明：存在无穷多组 $(k_1, k_2, ..., k_{n-2})$，使得

$(k_1a_1 + k_2a_2 + ... + k_{n-2}a_{n-2} + a_{n-1}, a_n) = 1$

证明 1：由引理 1 可知 n=3 时，结论成立

假设 n-1 时结论成立，下证 n 时成立

设 $(a_2, ..., a_n) = d$，由归纳假设可知存在无穷多组 $(k_2, ..., k_{n-2})$

使得 $(k_2a_2 + ... + k_{n-2}a_{n-2} + a_{n-1}, a_n) = d$

令 $k_2a_2 + ... + k_{n-2}a_{n-2} + a_{n-1} = p_1^{\alpha_1} ... p_l^{\alpha_l} q$ （$\alpha_i \geq 1$,且 p_i 为质数）

$a_n = p_1^{\beta_1} ... p_l^{\beta_l} r$ （$\beta_i \geq 1$,且 p_i 为质数）

$d = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} .... p_l^{\min(\alpha_l,\beta_l)}$

下证存在无穷多个整数k_1，使得（$k_1 a_1 + p_1^{\alpha_1} ... p_l^{\alpha_l} q$， $p_1^{\beta_1} ... p_l^{\beta_l} r$）=1

易知$(p_i, a_1) = 1$，（$p_1^{\alpha_1} ... p_l^{\alpha_l} q$， r）=1

且$p_1, ..., p_l, r$两两互质，由中国剩余定理易知存在无穷多个k_1满足

$$\begin{cases} k_1 \equiv 1 \bmod p_1 \\ ... \\ k_1 \equiv 1 \bmod p_l \\ k_1 \equiv 0 \bmod r \end{cases}$$

易知$(k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_{n-2} a_{n-2} + a_{n-1}, p_i) = (k_1 a_1, p_i) = (a_1, p_i) = 1$

$(k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_{n-2} a_{n-2} + a_{n-1}, r)$=（$p_1^{\alpha_1} ... p_l^{\alpha_l} q$， r）=1

所以存在无穷多组$(k_1, k_2, ..., k_{n-2})$，使得$(k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_{n-2} a_{n-2} + a_{n-1}, a_n) = 1$

证明 2：n=3，结论成立，当 n≥4 时，

设$(a_1, ..., a_{n-2}) = d$，则存在整数m_1、m_2、…、m_{n-2}使得

$m_1 a_1 + m_2 a_2 + ... + m_{n-2} a_{n-2} = d$，

易知$(d, a_{n-1}, a_n) = 1$

由引理 1，可知存在无穷多个整数 t,使得$(td + a_{n-1}, a_n) = 1$，

即$(tm_1 a_1 + tm_2 a_2 + ... + tm_{n-2} a_{n-2} + a_{n-1}, a_n) = 1$，引理 2 得证

由引理 2，下证定理 2

定理 2：若$(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$,则存在无穷多组整数$(x_1, x_2, ..., x_n)$，满足

1）$x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n = 1$

2）$x_1 | x_i$ **(i=2,3,…,n-1)**

证明：由引理 2 存在无穷多组（k_2，…,k_{n-1}），使得

$(k_2 a_2 + ... + k_{n-1} a_{n-1} + a_1, a_n) = 1$，利用裴蜀定理易知存在整数对$(s,t)$满足

$s(k_2 a_2 + ... + k_{n-1} a_{n-1} + a_1) + t a_n = 1$

令x_1=s,x_2=sk_2,…,x_{n-1}=sk_{n-1},x_n=t,显然满足$x_1|x_i$ (i=2,3,…,n-1)，且使得

$$x_1a_1+x_2a_2+...+x_na_n=1$$

上面我们得到了定理 2，如果我将上述证明加以改进又可以得到以下有趣的定理 3

定理 3：当n≥1 时，若（a_1，a_2，…,a_{2n+1}）=1,则存在无穷多组整数（x_1，x_2，…,x_{2n+1}），

满足 1）$x_1a_1+x_2a_2+…+x_{2n+1}a_{2n+1}=1$

2）$x_1|x_i$ (i=2,3,…,2n)

3）$x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,n)

可以看到在定理 2 的基础上我们又增加了条件 3）

证明：由定理 1 知 n=1 时，结论显然成立

假设 n=k-1 时结论成立，下证 n=k 时结论也成立

若（a_1，a_2，…,a_{2k+1}）=1

设（a_2，a_3，…,a_{2k}）=d

由归纳假设可得无穷多组（m_2,…,m_{2k}）

满足 1）$m_2a_2+m_3a_3+…+m_{2k}a_{2k}=d$

2）$m_2|m_i$ (i=3,4,…,2k-1)

3）$m_i|m_{i+1}$ (i=2,3,…,k)

易知（d，a_1，a_{2k+1}）=1

由引理 1，可知存在无穷多个整数t,使得（td+a_1，a_{2k+1}）=1，

易知一定存在无穷多组整数（x，y）

使得x（td+a_1）+ ya_{2k+1}=1

即$xa_1+xtm_2a_2+xtm_3a_3+\ldots+xtm_{2k}a_{2k}+ya_{2k+1}=1$

令$x_1=x$，$x_2=xtm_2$，…,$x_{2k}=xtm_{2k}$,$x_{2k+1}=y$,则由归纳假设，可得

$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{2k+1}a_{2k+1}=1$

$x_1|x_i$ (i=2,3,…,2k)

$x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,k)

定理 3 证毕

对于偶数，可完全类似得到定理 4

定理 4: $n\geq 2$ 时，若（a_1，a_2，…,a_{2n}）=1,则存在无穷多组整数（x_1，x_2，…,x_{2n}），

满足 1）$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{2n}a_{2n}=1$

2）$x_1|x_i$ (i=2,3,…,2n-1)

3）$x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,n-1)

证明：由定理 2 可知 n=2 时结论成立，和定理 3 完全类似可证明该定理成立。

此外，我们希望对定理 3 和定理 4 中的x_1的大小做一点简单的探讨，我们假定这里$a_i>0$，于是我们可以得到下面的定理 5

定理 5: 当$n\geq 1$ 时，$a_i>0$，若（a_1，a_2，…,a_{2n+1}）=1,且$a_{2n+1}=\min(a_1,a_2,\ldots,a_{2n+1})$（即$a_{2n+1}\leq a_i(i=1,\ldots,2n)$）则存在无穷多组整数（$x_1$，$x_2$，…,$x_{2n+1}$），

满足 1）$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{2n+1}a_{2n+1}=1$

2）$x_1|x_i$ (i=2,3,…,2n)

3）$x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,n)

4）$1\leq x_1\leq a_{2n+1}-1$

证明：在定理 3 的证明中，可知存在无穷多组（x，y）

使得x（$td+a_1$）+ $ya_{2n+1}=1$，由（$td+a_1$，a_{2n+1}）=1，易知

当x取遍 1,2，…, $a_{2n+1}-1$ 时，一定存在一个x_1使得

$x_1(td+a_1)\equiv 1(\bmod a_{2n+1})$，因此定理 5 得证。对于偶数当然可以得到完全类似的定理 6。

定理：当$n\geq 2$ 时，若（a_1，a_2，…,a_{2n}）=1,且$a_{2n}=\min(a_1,a_2,...,a_{2n})$则存在无穷多组整数（$x_1$，$x_2$，…,$x_{2n}$），

满足 1）$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{2n}a_{2n}=1$

2）$x_1|x_i$ (i=2,3,…,2n-1)

3）$x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,n-1)

4）$1\leq x_1\leq a_{2n}-1$

进一步，我们猜想能不能证明一个更强的定理，也就是下面的一个猜想：若（a_1，a_2，…,a_n）=1,存在无穷多组整数（x_1，x_2，…,x_n），

满足 1）$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{2n+1}a_{2n+1}=1$

2）$x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,n-2)

这个猜想是很有趣的，因为要满足 1），可知（x_1，x_2，…,x_n）=1，若把条件 2）改为 $x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,n-1)，必然得到$x_1=\pm 1$，这在一般条件下显然是不成立，因此上面的猜想就很有意思，一方面要满足条件 1）必然使x_1，x_2，…,x_n互质，另一方面我们又可以从x_1，x_2，…,x_n中任选n-1 个，让它们两两满足整除关系。

由定理 1 可知上面的猜想当 n=3 时，结论成立，下面我们进一步考虑 n=4 时是否成立，经过一番探索，我们得到了下面的引理 3

引理 3：若（a_1，a_2，a_3，a_4）=1，存在无穷多组整数（k，m），使得（a_1+ka_2+ kma_3，a_4）=1

证明 1：令 $a_4 = p_1^{\alpha_1}...p_l^{\alpha_l}q_1^{\beta_1}...q_h^{\beta_h}r_1^{\gamma_1}...r_t^{\gamma_t}s_1^{\lambda_1}...s_g^{\lambda g}$

（这里 $p_1,...p_l,q_1,...q_h,r_1...r_t,s_1...s_g$ 均为质数，且 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\lambda_i \ge 1$）

1）假设 $(a_1,p_i)=1$，让 $k \equiv 0(\bmod p_i)$，则 $(a_1+ka_2+kma_3,p_i)=1$

2）假设 $q_i|a_1$，$q_i|a_3$，$(a_2,q_i)=1$，令 $k \equiv 1(\bmod q_i)$，则 $(a_1+ka_2+kma_3,q_i)=1$

3）假设 $r_i|a_1$，$(a_2,r_i)=1$，$(a_3,r_i)=1$，令 $k \equiv 1(\bmod r_i)$，且 $m=r_1...r_t$，则 $(a_1+ka_2+kma_3,r_i)=1$

4）假设 $s_i|a_1$，$s_i|a_2$，$(a_3,s_i)=1$，让 $km \equiv 1(\bmod s_i)$，则 $(a_1+ka_2+kma_3,s_i)=1$

由 $(r_1...r_t,s_i)=1$ 可知存在 m_i，使得 $mm_i \equiv 1(\bmod s_i)$

即 $k \equiv m_i(\bmod s_i)$

由上所述，令 $m=r_1...r_t$

且 k 要满足

$$\begin{cases} k \equiv 0 \bmod p_1 \\ ... \\ k \equiv 0 \bmod p_l \\ k \equiv 1 \bmod q_1 \\ .... \\ k \equiv 1 \bmod q_h \\ k \equiv 1 \bmod r_1 \\ .... \\ k \equiv 1 \bmod r_t \\ k \equiv m_1 \bmod s_1 \\ .... \\ k \equiv m_g \bmod s_g \end{cases}$$

由中国剩余定理，可知有无穷多个 k 存在，由上述条件确定的无穷多组（k，m）

可以满足（a_1+ka_2+ kma_3，a_4）=1

上述证法略显麻烦，而且不易由 4 推广到 n，结果进一步探索，我们找到更简洁的证法 2

证明 2：设 $a_4 = p_1^{\alpha_1}...p_l^{\alpha_l}q_1^{\beta_1}...q_h^{\beta_h}$

假设 $(a_1, p_1...p_l) = 1$，令 $k \equiv 0(\bmod p_1...p_l)$，则 $(a_1 + ka_2 + kma_3, p_1...p_l) = 1$

假设 $q_i...q_h | a_1$，易知 $(a_2, a_3, q_1...q_h) = 1$，由引理 1 可知存在无穷多个m，使 $(a_2 + ma_3, q_1...q_h) = 1$，令 $k \equiv 1(\bmod q_1...q_h)$，则 $(a_1 + k(a_2 + ma_3), q_1...q_h) = 1$，由上可知存在无穷多个整数k，m，使得（$a_1$+k$a_2$+ km$a_3$，$a_4$）=1

由引理 3 易知上面的猜想对 n=4 成立。

我们注意到上面的证明 2 不但简洁，而且将该证法稍加改进可以将 4 推广到 n，于是得到下面的引理 4

引理 4:（a_1，a_2，a_3，…a_n）=1，存在无穷多个整数 $m_1, m_2, ..., m_{n-2}$**，使得** $(a_1 + m_1a_2 + m_1m_2a_3 + ... + m_1...m_{n-2}a_{n-1}, a_n) = 1$

证明：由引理 1 和引理 3 可知当 n=3，4 成立

假设 n=k 成立，下证 n=k+1 时成立

假设（a_1，a_2，a_3，…a_k，a_{k+1}）=1，设 $a_{k+1} = p_1^{\alpha_1}...p_l^{\alpha_l}q_1^{\beta_1}...q_h^{\beta_h}$

假设 $(a_1, p_1...p_l) = 1$，

令 $m_1 \equiv 0(\bmod p_1...p_l)$，则 $(a_1 + m_1a_2 + m_1m_2a_3 + ... + m_1...m_{k-1}a_k, p_1...p_l) = 1$

若 $q_i...q_h | a_1$，易知 $(a_2, a_3, ..., a_k, q_1...q_h) = 1$，由归纳假设可知存在无穷多组整数$m_2$，…,$m_{k-1}$,满足 $(a_2 + m_2a_3 + ... + m_2...m_{k-1}a_k, q_1...q_h) = 1$，

再令 $m_1 \equiv 1(\bmod q_1...q_h)$，则可得 $(a_1 + m_1a_2 + m_1m_2a_3 + ... + m_1...m_{k-1}a_k, q_1...q_h) = 1$，

即存在无穷多组整数 $m_1, m_2, ..., m_{k-1}$，

使得$(a_1+m_1a_2+m_1m_2a_3+...+m_1...m_{k-1}a_k,a_{k+1})=1$，易知$(p_1...p_l,q_1...q_h)=1$，由中国剩余定理知满足上述条件的整数$m_1$存在无穷多个。即n=k+1 成立，由数学归纳法知当$n\geq 3$时，（a_1，a_2，a_3，…a_n）=1，存在无穷多个整数$m_1,m_2,...,m_{n-2}$，

使得$(a_1+m_1a_2+m_1m_2a_3+...+m_1...m_{n-2}a_{n-1},a_n)=1$

由上述引理 4，易证我们前面猜想的定理 7 成立，即

定理 7：若（a_1，a_2，…,a_n）=1,存在无穷多组整数（x_1，x_2，…,x_n），满足 1）$x_1a_1+x_2a_2+…+x_na_n=1$

2）$x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,n-2)

证明：由引理 4，可知存在无穷多组整数（x，y）

使得$x(a_1+m_1a_2+m_1m_2a_3+...+m_1...m_{n-2}a_{n-1})+ya_n=1$成立

令$x_1=x,x_2=xm_1,x_3=xm_1m_2,...,x_{n-1}=xm_1m_2...m_{n-2},x_n=y$

易知定理 7 成立

类似于定理 5 的证明，我们可以得到定理 8

定理：当$n\geq 1$时，$a_i>0$，若（a_1，a_2，…,a_n）=1,且$a_n=\min(a_1,a_2,...,a_n)$则存在无穷多组整数（$x_1$，$x_2$，…,$x_n$），

满足 1）$x_1a_1+x_2a_2+…+x_na_n=1$

2）$x_i|x_{i+1}$ (i=1,2,…,n-2)

3）$1\leq x_1\leq a_n-1$

经过不断的探索和证明，我们得到了一系列很有趣的定理 1-8，和非常重要的引理 1-4，最终我们证明了一个比裴蜀定理更强的定理 7 和定理 8，就我们所知尚未看见类似的结论，由此可以看到对于一

些古老而经典的定理，如果继续探索研究，往往可以得到一些有意思的新结果，我们相信关于裴蜀定理一定还有很多值得探索的地方，希望本文能够起到抛砖引玉的作用。

参考文献

[1] 潘承洞，潘承彪，《简明数论》，北京大学出版社，1998.1

[2] 沈文选，张垚，冷岗松，唐立华，《奥林匹克数学中的初等数论问题》，湖南师范大学出版社，2009.8